دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی برق

پروژه درس بهینه‌سازی محدب

استاد: آقای دکتر صمدی

مهدی زینالی ۸۸۱۲۳۹۲۸

بررسی پایداری سیستم‌های دوبعدی مثبت با استفاده از روش نامساوی ماتریسی خطی (*LMI*)

۱- مقدمه

در این گزارش بر آن هستیم تا پایداری مجانبی سیستم‌های دوبعدی خطی و مثبت را در دوحالت بدون تاخیر و تاخیردار بررسی کنیم. این کار را با توجه به اهمیت مدل *GR* روی مدل *GR*برررسی خواهیم کرد. همچنین با توجه به اینکه مدل کلی *FTR* نیز حالت کلی است و تمامی مدل‌ها در واقع حالت خاصی از این مدل می‌باشند، پایداری را برای این مدل نیز بررسی می‌کنیم.

با توجه به اینکه نامساوی‌های ماتریسی امروزه کاربردهای وسیعی پیدا کرده‌اند و اکثر مسائل را از طریق این نامساوی‌ها حل می‌کنند، در اینجا نیز از ایده نامساوی‌های ماتریسی خطی برای بررسی پایداری این سیستم‌ها استفاده شده است. با استفاده از این روش شرایط لازم و کافی برای بررسی پایداری سیستم‌های دوبعدی مثبت در هر دوحالت بدون تاخیر و تاخیردار بیان شده است. در نهایت نیز روش مذکور را به دو مثال عددی اعمال کرده و برای حل نامساوی‌های ماتریسی، از نرم‌افزار متلب همراه با *SEDUMI* و *YALMIP* استفاده کرده‌ایم.

۲- تعاریف اولیه

فرض کنید $R^{n\times m}$ مجموعه ماتریس‌های حقیقی با n سطر و m ماتریس باشد و همچنین داشته باشیم:

$R^n = R^{n\times 1}$

مجموعه ماتریس‌های $n\times m$ با درایه‌های نامنفی را با $R_+^{n\times m}$ نشان داده و داریم: $R_+^n = R_+^{n\times 1}$

تعریف: یک ماتریس $A = [a_{ij}] \in R_+^{n\times m}$ اکیدا مثبت نامیده می‌شود اگر برای $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ داشته باشیم: $a_{ij} > 0$

اگر مجموعه ماتریس‌های متقارن و $n\times n$ را با S^n نشان دهیم، می‌توانیم تعریف زیر را نیز ارائه کنیم.

تعریف: یک ماتریس $Q \in S^n$ مثبت معین (مثبت نیمه معین) است اگر فرم کوادراتیک آن مثبت (نامنفی) برای هر $x \in R^n$ غیرصفر باشد. می‌توان این تعریف را به صورت زیر نیز بیان کرد:

$x^T Q X > 0 \to Q > 0$

تعریف: یک نامساوی به فرم (۱)، یک نامساوی ماتریس خطی (*LMI*) نامیده می‌شود.

$$\boldsymbol{F}(x) + F > 0 \qquad (۱)$$

که در آن x مقادیر بردارهای حقیقی از فضای $\boldsymbol{V}$ را می‌گیرد و همچنین نگاشت $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{V} \to S^n$ خطی است و $F \in S^n$ می‌باشد.

تعریف: یک ماتریس $A = [a_{ij}] \in R^{n\times n}$، ماتریس *Metzler* نامیده می‌شود اگر درایه‌های غیرقطری آن نامنفی باشند. یعنی داشته باشیم: $a_{ij} \geq 0\ for\ i \neq j; i,j = 1, \dots, n$

تعریف: یک ماتریس $A = [a_{ij}] \in R^{n\times n}$، ماتریس هورویتز نامیده می‌شود اگر تمامی مقادیر ویژه آن منفی باشند. (یعنی سیستم $\dot{x} = Ax$ به صورت مجانبی پایدار است).

تعریف: یک ماتریس $A = [a_{ij}] \in R^{n\times n}$، ماتریس *Schur* نامیده می‌شود اگر تمامی مقادیر ویژه آن دارای اندازه‌ی کمتر از یک باشند. (یعنی سیستم $x[i+1] = Ax[i]$ به صورت مجانبی پایدار است).

لم۱: یک ماتریس *Metzler* مانند $A = R^{n\times n}$، یک ماتریس هورویتز هست اگر و فقط اگر نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس قطری P برقرار باشد.

$$blockdiag[-(A^T P + PA), P] > 0 \qquad (۲)$$

کاملا مشخص است که $A = R_+^{n\times n}$ یک ماتریس *Schur* هست اگر و فقط اگر $(A - I_n)$ یک ماتریس هورویتز باشد.

لم۲: یک ماتریس نامنفی مانند $A = R_+^{n\times n}$ یک ماتریس *Schur* هست اگر و فقط اگر نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس قطری P برقرار باشد.

$$blockdiag\left[-\left((A - I_n)^T P + P(A - I_n)\right), P\right] > 0 \qquad (۳)$$

لم۳: یک ماتریس نامنفی مانند $A = R_+^{n\times n}$ یک ماتریس *Schur* هست اگر و فقط اگر نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس قطری P برقرار باشد. [۲،۳]

$$blockdiag[P - A^T PA, P] > 0 \qquad (۴)$$

۳- پایداری مجانبی سیستم‌های دوبعدی مثبت

۳-۱- سیستم دوبعدی مثبت با مدل *GR*

سیستم دو بعدی با مدل *GR* به فرم زیر را در نظر بگیرید.

$$GR: \begin{cases} \begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i,j) \\ y(i,j) = [C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} + Du(i,j) \end{cases} \qquad (۵)$$

که در آن $x^h(i,j) \in R^{n_1}; x^v(i,j) \in R^{n_2}; y(i,j) \in R^p ; u(i,j) \in R^m$ بردارهای حالت عمودی و افقی، بردار خروجی و بردار ورودی سیستم می‌باشند. همچنین ابعاد ماتریسهای داده شده به صورت مناسبی انتخاب شده‌اند.

تعریف: سیستم دوبعدی با معادلات ۵، یک سیستم دوبعدی مثبت با مدل GR نامیده می‌شود اگر برای هر شرایط مرزی نامنفی به فرم $x^h(0,j) \in R_+^{n_1}, x^v(i,0) \in R_+^{n_2}$ و همه دنباله‌های ورودی $u(i,j) \in R_+^m$ داشته باشیم:

$$x^h(i,j) \in R_+^{n_1}; x^v(i,j) \in R_+^{n_2}; y(i,j) \in R_+^p$$

قضیه۱: سیستم دوبعدی با مدل GR، مثبت هست اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in R_+^{n\times n}; \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \in R_+^{n\times m}; [C_1 \quad C_2] \in R_+^{p\times n}; D \in R_+^{p\times m} \qquad (۶)$$

قضیه۲: سیستم دوبعدی مثبت با مدل GR پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم یک بعدی زیر پایداری مجانبی باشد.

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} x_i \qquad (۷)$$

قضیه۳: سیستم دوبعدی مثبت با مدل GR پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد. [۶]

الف– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس‌های قطری P_1, P_2 برقرار باشد.

$$blockdiag\left[\begin{bmatrix} 2P_1 - A_{11}^T P_1 - P_1 A_{11} & -A_{21}^T P_2 - P_1 A_{12} \\ -A_{12}^T P_1 - P_2 A_{21} & 2P_2 - A_{22}^T P_2 - P_2 A_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\right] > 0 \qquad (۸)$$

ب– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس‌های قطری P_1, P_2 برقرار باشد.

$$blockdiag\left[\begin{bmatrix} P_1 - A_{11}^T P_1 A_{11} - A_{21}^T P_2 A_{21} & -A_{11}^T P_1 A_{12} - A_{21}^T P_2 A_{22} \\ -A_{22}^T P_2 A_{21} - A_{12}^T P_1 A_{11} & P_2 - A_{22}^T P_2 A_{22} - A_{12}^T P_1 A_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\right] > 0$$

(۹)

اثبات: با استفاده از قضیه ۲ سیستم مثبت با مدل GR پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم یک بعدی داده شده با رابطه ۷ پایداری مجانبی باشد. با اعمال لم ۲ به سیستم ۷ نامساوی ماتریسی ۸ به دست می‌آید.

$$blockdiag\left[\begin{bmatrix} I_{n_1}-A_{11}^T & -A_{21}^T \\ -A_{12}^T & I_{n_2}-A_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n_1}-A_{11} & -A_{21} \\ -A_{12} & I_{n_2}-A_{22} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\right]=$$

$$blockdiag\left[\begin{bmatrix} 2P_1-A_{11}^TP_1-P_1A_{11} & -A_{21}^TP_2-P_1A_{12} \\ -A_{12}^TP_1-P_2A_{21} & 2P_2-A_{22}^TP_2-P_2A_2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\right]>0$$

به طور مشابه با اعمال لم ۳ به سیستم ۷ نامساوی ماتریسی ۹ حاصل می‌شود. ■

۲-۳- سیستم دوبعدی مثبت با مدل کلی FTR:

مدل کلی FTR یک سیستم دوبعدی خطی را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$FTR:\begin{cases} x(i+1,j+1)=A_0x(i,j)+A_1x(i+1,j)+A_2x(i,j+1) \\ \qquad +B_0u(i,j)+B_1u(i+1,j)+B_2u(i,j+1) \\ y(i,j)=Cx(i,j)+Du(i,j) \end{cases} \qquad (۱۰)$$

که در آن $x(i,j)\in R^n\,;y(i,j)\in R^p\,;u(i,j)\in R^m$ بردار حالت، بردار خروجی و بردار ورودی سیستم می‌باشند. همچنین ابعاد ماتریسهای داده شده به صورت مناسبی انتخاب شده‌اند. یعنی داریم:

$A_k\in R^{n\times n}; B_k\in R^{n\times m}; k=0,1,2; C\in R^{p\times n}; D\in R^{p\times m}$

تعریف: سیستم دوبعدی با معادلات ۱۰، یک سیستم دوبعدی مثبت نامیده می‌شود اگر برای هر شرایط مرزی نامنفی به فرم $x(0,j)\in R_+^n, x(i,0)\in R_+^n$ و همه دنباله‌های ورودی $u(i,j)\in R_+^m$ داشته باشیم:

$x(i,j)\in R_+^n; y(i,j)\in R_+^p$

قضیه۴: سیستم دوبعدی با روابط (۱۰) مثبت هست اگر و فقط اگر داشته باشیم:

$$A_k\in R_+^{n\times n}; B_k\in R_+^{n\times m}; C\in R_+^{p\times n}; D\in R_+^{p\times m} \qquad (۱۱)$$

قضیه۵: سیستم دوبعدی مثبت با مدل کلی FTR با روابط (۱۰) پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر یکی از سیستم‌های یک‌بعدی زیر پایداری مجانبی باشد.

$$x_{i+1} = (A_0 + A_1 + A_2)x_i \tag{۱۲}$$

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} A_1 + A_2 & A_0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix} x_i \tag{۱۳}$$

نتیجه۱: در حالت خاص $A_0 = 0$ سیستم دوبعدی مثبت با مدل MFM حاصل می‌شود که پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم یک بعدی زیر پایداری مجانبی باشد.

$$x_{i+1} = (A_1 + A_2)x_i \tag{۱۴}$$

قضیه۶: سیستم مثبت با مدل FTR پایداری مجانبی است اگر و فقط یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد.

الف– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس قطری P برقرار باشد.

$$block\ diag[2P - \textstyle\sum_{k=0}^{2}(A_k^T P + P A_k)\,, P] > 0 \tag{۱۵}$$

ب– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس قطری P برقرار باشد.

$$block\ diag[P - \textstyle\sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2}(A_k^T P A_l)\,, P] > 0 \tag{۱۶}$$

ج– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس‌های قطری P_1, P_2 برقرار باشد.

$$block\ diag\left[\begin{bmatrix} 2P_1 - (A_1^T + A_2^T)P_1 - P_1(A_1 + A_2) & -P_2 - P_1 A_0 \\ -P_2 - A_0^T P_1 & 2P_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\right] > 0 \tag{۱۷}$$

د– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس‌های قطری P_1, P_2 برقرار باشد.

$$block\ diag\left[\begin{bmatrix} P_1 - (A_1 + A_2)^T P_1 (A_1 + A_2) - P_2 & -(A_1 + A_2)^T P_1 A_0 \\ -A_0^T P_1 (A_1 + A_2) & P_2 - A_0^T P A_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\right] > 0$$

(۱۸)

اثبات: با استفاده از قضیه ۵ سیستم دوبعدی مثبت با مدل کلی FTR پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر سیستم یک بعدی با روابط (۱۲) پایداری مجانبی باشد. با اعمال لم ۲ به سیستم (۱۲) نامساوی ماتریسی (۱۵) حاصل می‌شود.

$$block\ diag[(I_n - \textstyle\sum_{k=0}^{2} A_k^T)^T P + P(I_n - \sum_{k=0}^{2} A_k^T), P] = blockdiag[2P - \sum_{k=0}^{2}(A_k^T P + P A_k)\,, P] > 0$$

به طور مشابه با اعمال لم ۳ به سیستم (۱۲) نامساوی ماتریسی ۱۶ حاصل می‌شود.

$$block\ diag[P-(\sum_{k=0}^{2}A_k)^T P(\sum_{l=0}^{2}A_l),P] = block\ diag[P-\sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2}(A_k^T P A_l)\ ,P] > 0$$

همچنین با جاگذاری سیستم یک‌بعدی (۱۳) به جای سیستم (۱۲) و اعمال لم‌های ۲ و۳ به آن نامساوی‌های ماتریسی ۱۷ و ۱۸ حاصل می‌شوند. ■

نتیجه۲: در حالت خاص $A_0 = 0$ سیستم‌دوبعدی مثبت با مدل MFM حاصل می‌شود که پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

الف– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس قطری P برقرار باشد.

$$blockdiag[2P-\sum_{k=0}^{2}(A_k^T P + PA_k)\ ,P] > 0 \tag{۱۹}$$

ب– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس قطری P برقرار باشد.

$$blockdiag[P-\sum_{k=0}^{2}\sum_{l=0}^{2}(A_k^T P A_l)\ ,P] > 0 \tag{۲۰}$$

۴- بررسی پایداری مجانبی سیستم‌های دوبعدی مثبت تاخیردار

۴-۱- سیستم دوبعدی مثبت با مدل *GR* تاخیردار

سیستم دوبعدی با مدل GR که دارای q تاخیر در حالت سیستم هست را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$GR: \begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{q}\left(A_k \begin{bmatrix} x^h(i-k,j) \\ x^v(i,j-k) \end{bmatrix}\right) \tag{۲۱}$$

که در آن داریم:

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k \end{bmatrix}, k = 0,1,\dots,q \tag{۲۲}$$

حال بردارهای جدیدی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\overline{x}^h(i,j) = \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^h(i-1,j) \\ \vdots \\ x^h(i-q,j) \end{bmatrix};\quad \overline{x}^v(i,j) = \begin{bmatrix} x^v(i,j) \\ x^v(i,j-1) \\ \vdots \\ x^v(i,j-q) \end{bmatrix} \tag{۲۳}$$

با این تعاریف جدید رابطه (۲۱) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{bmatrix} \overline{x}^h(i+1,j) \\ \overline{x}^v(i,j+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \overline{x}^h(i,j) \\ \overline{x}^v(i,j) \end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

که در آن داریم:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{11}^1 & \cdots & A_{11}^{q-1} & A_{11}^q & A_{12}^0 & A_{12}^1 & \cdots & A_{12}^{q-1} & A_{12}^q \\ I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_{n_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^0 & A_{21}^1 & \cdots & A_{21}^{q-1} & A_{21}^q & A_{22}^0 & A_{22}^1 & \cdots & A_{22}^{q-1} & A_{22}^q \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I_{n_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{n_2} & 0 \end{bmatrix} \in R^{N\times N}$$

$$N=(q+1)(n_1+n_2) \qquad (۲۵)$$

بنابراین یک مدل GR با q تاخیر (رابطه (۲۱) به یک مدل GR جدید با ابعاد بزرگتر ولی بدون تاخیر تبدیل شده است. با اعمال قضیه ۱ به روابط (۲۴)، قضیه زیر حاصل می‌شود.

قضیه۷: مدل GR با q تاخیر با رابطه (۲۱)، مثبت هست اگر و فقط اگر برای $k=0,1,\dots,q$ داشته باشیم: $A_k \in R_+^{(n_1+n_1)(n_2+n_2)}$ و یا به طور معادل داشته باشیم: $A\in R_+^{N\times N}$

قضیه۸: مدل GR مثبت با رابطه (۲۱) پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشند.

الف– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس‌های قطری P_1,P_2 برقرار باشد.

$$blockdiag\left[\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22}\end{bmatrix},\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2\end{bmatrix}\right]>0 \qquad (۲۶)$$

$$P_{11}=\begin{bmatrix} 2P_1^0-A_{11}^{0\,T}P_1^0-P_1^0A_{11}^0 & -P_1^1-P_1^0A_{11}^1 & \cdots & -P_1^0A_{11}^{q-1} & -P_1^0A_{11}^q \\ -A_{11}^{1\,T}P_1^0-P_1^1 & 2P_1^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{11}^{q-1\,T}P_1^0 & 0 & \cdots & 2P_1^{q-1} & -P_1^q \\ -A_{11}^{q\,T}P_1^0 & 0 & \cdots & -P_1^q & 2P_1^q \end{bmatrix} \qquad (\text{۲۷الف})$$

$$P_{12}=P_{21}^T=-\begin{bmatrix} A_{21}^{0\,T}P_2^0+P_1^0A_{21}^0 & P_1^0A_{12}^1 & \cdots & P_1^0A_{12}^{q-1} & P_1^0A_{12}^q \\ A_{21}^{1\,T}P_2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21}^{q-1\,T}P_2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{21}^{q\,T}P_2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (\text{۲۷ب})$$

$$P_{22}=\begin{bmatrix} 2P_2^0-A_{22}^{0\,T}P_2^0-P_2^0A_{22}^0 & -P_2^1-P_2^0A_{22}^1 & \cdots & -P_2^0A_{22}^{q-1} & -P_2^0A_{22}^q \\ -A_{22}^{1\,T}P_2^0-P_2^1 & 2P_2^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{22}^{q-1\,T}P_2^0 & 0 & \cdots & 2P_2^{q-1} & -P_2^q \\ -A_{22}^{q\,T}P_2^0 & 0 & \cdots & -P_2^q & 2P_2^q \end{bmatrix} \qquad (\text{۲۷ج})$$

$$P_k=block\ diag\begin{bmatrix} P_k^0 & P_k^1 & \cdots & P_k^q\end{bmatrix};k=1,2 \qquad (\text{۲۷د})$$

ب– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس‌های قطری P_1, P_2 برقرار باشد.

$$blockdiag\left[\begin{bmatrix}\bar{P}_{11} & \bar{P}_{12}\\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}P_1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix}\right] > 0 \qquad (۲۸)$$

که در آن داریم:

$$\bar{P}_{11} = \begin{bmatrix} P_1^0 - P_1^1 - A_{11}^{0\,T} P_1^0 A_{11}^0 & -A_{11}^{0\,T} P_1^0 A_{11}^1 & \cdots & -A_{11}^{0\,T} P_1^0 A_{11}^q \\ -A_{21}^{0\,T} P_2^0 A_{21}^0 & -A_{21}^{0\,T} P_2^0 A_{21}^1 & \cdots & -A_{21}^{0\,T} P_2^0 A_{21}^q \\ -A_{11}^{1\,T} P_1^0 A_{11}^0 & P_1^1 - P_1^2 - A_{11}^{1\,T} P_1^0 A_{11}^1 & \cdots & -A_{11}^{1\,T} P_1^0 A_{11}^q \\ -A_{21}^{1\,T} P_2^0 A_{21}^0 & -A_{21}^{1\,T} P_2^0 A_{21}^1 & \cdots & -A_{21}^{1\,T} P_2^0 A_{21}^q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{11}^{q\,T} P_1^0 A_{11}^0 & -A_{11}^{q\,T} P_1^0 A_{11}^1 & \cdots & -A_{11}^{q\,T} P_1^0 A_{11}^q \\ -A_{21}^{q\,T} P_2^0 A_{21}^0 & -A_{21}^{q\,T} P_2^0 A_{21}^1 & \cdots & -A_{21}^{q\,T} P_2^0 A_{21}^q \end{bmatrix} \qquad (\text{۲۹الف})$$

$$\bar{P}_{12} = \bar{P}_{21}^T = -\begin{bmatrix} A_{11}^{0T} P_1^0 A_{12}^0 + A_{21}^{0T} P_2^0 A_{22}^0 & A_{11}^{0T} P_1^0 A_{12}^1 + A_{21}^{0T} P_2^0 A_{22}^1 & \cdots & A_{11}^{0T} P_1^0 A_{12}^q + A_{21}^{0T} P_2^0 A_{22}^q \\ A_{11}^{1T} P_1^0 A_{12}^0 + A_{21}^{1T} P_2^0 A_{22}^0 & A_{11}^{1T} P_1^0 A_{12}^1 + A_{21}^{1T} P_2^0 A_{22}^1 & \cdots & A_{11}^{1T} P_1^0 A_{12}^q + A_{21}^{1T} P_2^0 A_{22}^q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{11}^{qT} P_1^0 A_{12}^0 + A_{21}^{qT} P_2^0 A_{22}^0 & A_{11}^{qT} P_1^0 A_{12}^1 + A_{21}^{qT} P_2^0 A_{22}^1 & \cdots & A_{11}^{qT} P_1^0 A_{12}^q + A_{21}^{qT} P_2^0 A_{22}^q \end{bmatrix} \qquad (29b)$$

$$\bar{P}_{22} = \begin{bmatrix} P_2^0 - A_{22}^{0T} P_2^0 A_{22}^0 - A_{12}^{0T} P_1^0 A_{12}^0 & -A_{22}^{0T} P_2^0 A_{22}^1 - A_{12}^{0T} P_1^0 A_{12}^1 & \cdots & -A_{22}^{0T} P_2^0 A_{22}^q - A_{12}^{0T} P_1^0 A_{12}^q \\ -A_{22}^{1T} P_2^0 A_{22}^0 - A_{12}^{1T} P_1^0 A_{12}^0 & P_2^1 - A_{22}^{1T} P_2^0 A_{22}^1 - A_{12}^{1T} P_1^0 A_{12}^1 & \cdots & A_{22}^{1T} P_2^0 A_{22}^q - A_{12}^{1T} P_1^0 A_{12}^q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{22}^{qT} P_2^0 A_{22}^0 - A_{12}^{qT} P_1^0 A_{12}^0 & -A_{22}^{qT} P_2^0 A_{22}^1 - A_{12}^{qT} P_1^0 A_{12}^1 & \cdots & P_2^q - A_{22}^{qT} P_2^0 A_{22}^q - A_{12}^{qT} P_1^0 A_{12}^q \end{bmatrix} \qquad (29c)$$

$$P_k = block\ diag\left[P_k^0 \quad P_k^1 \quad \cdots \quad P_k^q\right]; \quad k = 1,2 \qquad (\text{۲۹د})$$

اثبات: سیستم دوبعدی مثبت با مدل GR (۲۱) پایداری مجانبی است اگر و فقط اگر مدل تغییر یافته آن با روابط (۲۴) پایداری مجانبی باشد. با اعمال قضیه ۳ به مدل (۲۴) و با استفاده از روابط (۲۵) و (۸) به دست می‌آوریم:

$$P_{11} = 2P_1 - A_{11}^T P_1 - P_1 A_{11} =$$

$$\begin{bmatrix} 2P_1^0 - A_{11}^{0\,T} P_1^0 - P_1^0 A_{11}^0 & -P_1^1 - P_1^0 A_{11}^1 & \cdots & -P_1^0 A_{11}^{q-1} & -P_1^0 A_{11}^q \\ -A_{11}^{1\,T} P_1^0 - P_1^1 & 2P_1^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{11}^{q-1\,T} P_1^0 & 0 & \cdots & 2P_1^{q-1} & -P_1^q \\ -A_{11}^{q\,T} P_1^0 & 0 & \cdots & -P_1^q & 2P_1^q \end{bmatrix}$$

$$P_{12} = P_{21}^T = -A_{21}^T P_2 - P_1 A_{12} = -\begin{bmatrix} A_{21}^{0\,T} P_2^0 + P_1^0 A_{21}^0 & P_1^0 A_{12}^1 & \cdots & P_1^0 A_{12}^{q-1} & P_1^0 A_{12}^q \\ A_{21}^{1\,T} P_2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{21}^{q-1\,T} P_2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{21}^{q\,T} P_2^0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_{22} = 2P_2 - A_{22}^T P_2 - P_2 A_{22} =$$

$$\begin{bmatrix} 2P_2^0 - A_{22}^{0\,T} P_2^0 - P_2^0 A_{22}^0 & -P_2^1 - P_2^0 A_{22}^1 & \cdots & -P_2^0 A_{22}^{q-1} & -P_2^0 A_{22}^q \\ -A_{22}^{1\,T} P_2^0 - P_2^1 & 2P_2^1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{22}^{q-1\,T} P_2^0 & 0 & \cdots & 2P_2^{q-1} & -P_2^q \\ -A_{22}^{q\,T} P_2^0 & 0 & \cdots & -P_2^q & 2P_2^q \end{bmatrix}$$

به طور مشابه با استفاده از روابط (۲۵) و (۹) خواهیم داشت:

$$\bar{P}_{11} = P_1 - A_{11}^T P_1 A_{11} - A_{21}^T P_2 A_{21}$$

$$= \begin{bmatrix} P_1^0 - P_1^1 - A_{11}^{0T} P_1^0 A_{11}^0 & -A_{11}^{0T} P_1^0 A_{11}^1 & \cdots & -A_{11}^{0T} P_1^0 A_{11}^q \\ \quad -A_{21}^{0T} P_2^0 A_{21}^0 & \quad -A_{21}^{0T} P_2^0 A_{21}^1 & & \quad -A_{21}^{0T} P_2^0 A_{21}^q \\ -A_{11}^{1T} P_1^0 A_{11}^0 & P_1^1 - A_{11}^{1T} P_1^0 A_{11}^1 & \cdots & -A_{11}^{1T} P_1^0 A_{11}^q \\ \quad -A_{21}^{1T} P_2^0 A_{21}^0 & \quad -A_{21}^{1T} P_2^0 A_{21}^1 & & \quad -A_{21}^{1T} P_2^0 A_{21}^q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{11}^{qT} P_1^0 A_{11}^0 & -A_{11}^{qT} P_1^0 A_{11}^1 & \cdots & P_1^q - A_{11}^{qT} P_1^0 A_{11}^q \\ \quad -A_{21}^{qT} P_2^0 A_{21}^0 & \quad -A_{21}^{qT} P_2^0 A_{21}^1 & & \quad -A_{21}^{qT} P_2^0 A_{21}^q \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_{12} = \bar{P}_{21}^T = -A_{11}^T P_1 A_{12} - A_{21}^T P_2 A_{22}$$

$$= -\begin{bmatrix} A_{11}^{0T} P_1^0 A_{12}^0 & A_{11}^{0T} P_1^0 A_{12}^1 & \cdots & A_{11}^{0T} P_1^0 A_{12}^q \\ \quad +A_{21}^{0T} P_2^0 A_{22}^0 & \quad -A_{21}^{0T} P_2^0 A_{22}^1 & & \quad +A_{21}^{0T} P_2^0 A_{22}^q \\ A_{11}^{1T} P_1^0 A_{12}^0 & A_{11}^{1T} P_1^0 A_{12}^1 & \cdots & A_{11}^{1T} P_1^0 A_{12}^q \\ \quad +A_{21}^{1T} P_2^0 A_{22}^0 & \quad +A_{21}^{1T} P_2^0 A_{22}^1 & & \quad +A_{21}^{1T} P_2^0 A_{22}^q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{11}^{qT} P_1^0 A_{12}^0 & A_{11}^{qT} P_1^0 A_{12}^1 & \cdots & A_{11}^{qT} P_1^0 A_{12}^q \\ \quad +A_{21}^{qT} P_2^0 A_{22}^0 & \quad +A_{21}^{qT} P_2^0 A_{22}^1 & & \quad +A_{21}^{qT} P_2^0 A_{22}^q \end{bmatrix}$$

$$\bar{P}_{22} = P_2 - A_{12}^T P_1 A_{12} - A_{22}^T P_2 A_{22}$$

$$= \begin{bmatrix} P_2^0 - A_{22}^{0T} P_2^0 A_{22}^0 & -A_{22}^{0T} P_2^0 A_{22}^1 & \cdots & -A_{22}^{0T} P_2^0 A_{22}^q \\ \quad -A_{12}^{0T} P_1^0 A_{12}^0 & \quad -A_{12}^{0T} P_1^0 A_{12}^1 & & \quad -A_{12}^{0T} P_1^0 A_{12}^q \\ -A_{22}^{1T} P_2^0 A_{22}^0 & P_2^1 - A_{22}^{1T} P_2^0 A_{22}^1 & \cdots & A_{22}^{1T} P_2^0 A_{22}^q \\ \quad -A_{12}^{1T} P_1^0 A_{12}^0 & \quad -A_{12}^{1T} P_1^0 A_{12}^1 & & \quad -A_{12}^{1T} P_1^0 A_{12}^q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A_{22}^{qT} P_2^0 A_{22}^0 & -A_{22}^{qT} P_2^0 A_{22}^1 & \cdots & P_2^q - A_{22}^{qT} P_2^0 A_{22}^q \\ \quad -A_{12}^{qT} P_1^0 A_{12}^0 & \quad -A_{12}^{qT} P_1^0 A_{12}^1 & & \quad -A_{12}^{qT} P_1^0 A_{12}^q \end{bmatrix}$$

مثال ۱: با استفاده از روش LMI پایداری نمایی سیستم مثبت با مدل GR (۲۱) با $q = 1$ و A_0, A_1 داده شده را بررسی کنید.

$$A_0 = \left[\begin{array}{cc:c} 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0.2 \end{array}\right]; A_1 = \left[\begin{array}{cc:c} 0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0.2 \end{array}\right] \qquad (۳۰)$$

حل: در این حالت ماتریس سیستم دوبعدی مثبت با مدل GR در رابطه (۲۵) به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$A_{11}^0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix};\ A_{12}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix};\ A_{21}^0 = [0 \quad 0]; A_{22}^0 = 0.2$$

$$A_{11}^1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix};\ A_{12}^1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix};\ A_{21}^1 = [0 \quad 0]; A_{22}^1 = 0.2$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}^0 & A_{11}^1 & A_{12}^0 & A_{12}^1 \\ I_2 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^0 & A_{21}^1 & A_{22}^0 & A_{22}^1 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

با اعمال قضیه ۸ و استفاده از نرم‌افزار متلب همراه با $SEDUMI$ و $YALMIP$ برای حل کردن نامساوی ماتریسی (۲۶)، جواب زیر به دست می‌آید.

$$blockdiag[P1, P2] = diag[0.7799\ \ 0.7883\ \ 0.5625\ \ 0.5615\ \ \ 0.9452\ \ 0.5931]$$

در واقع قسمت الف قضیه ۳ (رابطه ۸) را در برنامه نویسی برای سادگی می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$blockdiag\left[\begin{bmatrix} I_{n_1} - A_{11}^T & -A_{21}^T \\ -A_{12}^T & I_{n_2} - A_{22}^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n_1} - A_{11} & -A_{21} \\ -A_{12} & I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\right] > 0$$

رابطه فوق نیز با دو نامساوی زیر معادل است:

$$\left(\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}\right) > 0 \rightarrow$$

$$\left(I_{n_1 \oplus n_2} - A\right)^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}\left(I_{n_1 \oplus n_2} - A\right) > 0$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} > 0$$

حال اگر ماتریس A داده شده در رابطه ۳۱ را که از رابطه ۲۵ حاصل شده است در دو نامساوی فوق قرار دهیم جواب حاصل خواهد شد.

و اگر با همان ابزار، نامساوی ماتریسی (۲۸) را حل کنیم جواب به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$blockdiag[P1,P2] = diag[1.5526\ \ 1.5897\ 0.8374\ 0.8074\ 1.8736\ \ 0.9290]$$

بنابراین نامساوی‌های ماتریسی نسبت به ماتریسهای $P1, P2$ قابل هستند و در نتیجه سیستم دوبعدی مثبت با مدل GR داده شده با روابط (۲۱) و ماتریس‌های (۳۰) پایدار مجانبی هست.

روش نامساوی ماتریسی به راحتی می‌تواند برای سیستم‌های دوبعدی مثبت با مدل GR به فرم زیر نیز بسط داده شود.

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{q_1}\sum_{l=0}^{q_2} A_{kl} \begin{bmatrix} x^h(i-k,j-l) \\ x^v(i-k,j-l) \end{bmatrix}$$

که در آن $x^h(i,j) \in R_+^{n_1}; x^v(i,j) \in R_+^{n_2}$ متغیرهای حالت افقی و عمودی سیستم می‌باشند و نیز داریم:

$$A_{kl} \in R_+^{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$$

۲-۴- سیستم دوبعدی با مدل کلی FTR همراه با تاخیر

سیستم دوبعدی با مدل کلی FTR با q تاخیر را به صورت زیردر نظر بگیرید.

$$x(i+1,j+1) = \sum_{k=0}^{q}\left(A_k^0 x(i-k,j-k) + A_k^1 x(i+1-k,j-k) + A_k^2 x(i-k,j+1-k)\right) \qquad (۳۲)$$

حال بردار و ماتریس‌های جدیدی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\overline{x}(i,j) = \begin{bmatrix} x(i,j) \\ x(i-1,j-1) \\ x(i-2,j-2) \\ \vdots \\ x(i-q,j-q) \end{bmatrix} \in R^{\overline{N}}, \overline{N} = (q+1)n \qquad (\text{الف}۳۳)$$

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0^0 & A_1^0 & \cdots & A_{q-1}^0 & A_q^0 \\ I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_n & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_1 = \begin{bmatrix} A_0^1 & A_1^1 & \cdots & A_{q-1}^1 & A_q^1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۳۳\text{ب})$$

$$\overline{A}_2=\begin{bmatrix}A_0^2 & A_1^2 & \cdots & A_{q-1}^2 & A_q^2\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

حال با این تعاریف جدید می‌توانیم رابطه (۳۲) را به فرم زیر بنویسیم.

$$\overline{x}(i+1,j+1)=\overline{A}_0\overline{x}(i,j)+\overline{A}_1x(i+1,j)+\overline{A}_2x(i,j+1) \qquad (۳۴)$$

بنابراین مدل کلی با q تاخیر (معادله ۳۲) به یک فرم جدید کلی بدون تاخیر تبدیل شده است که درجه بالاتری دارد. با اعمال قضیه ۴ به مدل (۳۴) می‌توانیم قضیه زیر را به سادگی به دست آوریم:

قضیه۹: سیستم دوبعدی با مدل کلی FTR با q تاخیر (۳۲)، یک سیستم مثبت هست اگر و فقط اگر $A_k^t\in R_+^{n\times n}; t=0,1,2\ and\ k=0,1,\dots,q$ و یا به طور معادل داشته باشیم:

$$\overline{A}_t\in R_+^{\overline{N}\times\overline{N}}; t=0,1,2$$

قضیه۱۰: سیستم دوبعدی مثبت با مدل کلی FTR (۳۲) به طور مجانبی پایدار است اگر و فقط اگر یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشند.

الف– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس قطری P برقرار باشد.

$$block\ diag\left[2P-\left(\hat{P}_0+\hat{P}_1+\hat{P}_2\right),P\right]>0 \qquad (۳۵)$$

که در آن داریم:

$$P=block\ diag\left[P_0\ \ P_1\ \ \cdots\ \ P_q\right] \qquad (\text{۳۶الف})$$

$$\hat{P}_0=\begin{bmatrix}A_0^{0\,T}P_0+P_0A_0^0 & P_1+P_0A_1^0 & \cdots & P_0A_{q-1}^0 & P_0A_q^0\\ A_1^{0\,T}P_0+P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{q-1}^{0\,T}P_0 & 0 & \cdots & 0 & P_q\\ A_q^{0\,T}P_0 & 0 & \cdots & P_q & 0\end{bmatrix} \qquad (\text{۳۶ب})$$

$$\hat{P}_k=\begin{bmatrix}A_0^{k\,T}P_0+P_0A_0^k & P_0A_1^k & \cdots & P_0A_{q-1}^k & P_0A_q^k\\ A_1^{k\,T}P_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{q-1}^{k\,T}P_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ A_q^{k\,T}P_0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}; k=1,2 \qquad (\text{۳۶ج})$$

ب– نامساوی ماتریسی زیر برای ماتریس قطری P برقرار باشد.

$$block\ diag\left[P-\hat{P},P\right]>0 \tag{۳۷}$$

که در آن داریم:

$$P=block\ diag\left[P_0\ \ P_1\ \ \cdots\ \ P_q\right] \tag{۳۸الف}$$

$$\hat{P}=\begin{bmatrix} A_0^TP_0A_0+P_1 & A_0^TP_0A_1 & \cdots & A_0^TP_0A_{q-1} & A_0^TP_0A_q \\ A_1^TP_0A_0 & A_1^TP_0A_1+P_2 & \cdots & A_1^TP_0A_{q-1} & A_1^TP_0A_q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{q-1}^TP_0A_0 & A_{q-1}^TP_0A_1 & \cdots & A_{q-1}^TP_0A_{q-1}+P_q & A_{q-1}^TP_0A_q \\ A_q^TP_0A_0 & A_q^TP_0A_1 & \cdots & A_q^TP_0A_{q-1} & A_q^TP_0A_q \end{bmatrix} \tag{۳۸ب}$$

$$A_k=A_k^0+A_k^1+A_k^2;\quad k=0,1,\cdots,q \tag{۳۸ج}$$

اثبات: سیستم دوبعدی مثبت با مدل کلی FTR (۳۲) پایدار مجانبی است اگر و فقط اگر مدل تغییر یافته آن (۳۴) پایدار مجانبی باشد. با اعمال نامساوی ماتریسی (۱۵) به مدل تغییر یافته (۳۴) می‌توانیم نامساوی ماتریسی (۳۵) را به دست آوریم.

$$\hat{P}_0=A_0^T\,P+PA_0=\begin{bmatrix} A_0^{0\,T}P_0+P_0A_0^0 & P_1+P_0A_1^0 & \cdots & P_0A_{q-1}^0 & P_0A_q^0 \\ A_1^{0\,T}P_0+P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{q-1}^{0\,T}P_0 & 0 & \cdots & 0 & P_q \\ A_q^{0\,T}P_0 & 0 & \cdots & P_q & 0 \end{bmatrix}$$

و همچنین:

$$\hat{P}_k=A_k^T\,P+PA_k=\begin{bmatrix} A_0^{k\,T}P_0+P_0A_0^k & P_0A_1^k & \cdots & P_0A_{q-1}^k & P_0A_q^k \\ A_1^{k\,T}P_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{q-1}^{k\,T}P_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_q^{k\,T}P_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix};k=1,2$$

به طور مشابه با اعمال نامساوی ماتریسی (۱۶) به مدل تغییر یافته (۳۴) نامساوی ماتریسی (۳۷) به دست می‌آید.

$$\hat{P}=\left(\textstyle\sum_{k=0}^{2}A_k\right)^TP\left(\textstyle\sum_{k=0}^{2}A_k\right)=$$

$$\begin{bmatrix} A_0^TP_0A_0+P_1 & A_0^TP_0A_1 & \cdots & A_0^TP_0A_{q-1} & A_0^TP_0A_q \\ A_1^TP_0A_0 & A_1^TP_0A_1+P_2 & \cdots & A_1^TP_0A_{q-1} & A_1^TP_0A_q \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{q-1}^TP_0A_0 & A_{q-1}^TP_0A_1 & \cdots & A_{q-1}^TP_0A_{q-1}+P_q & A_{q-1}^TP_0A_q \\ A_q^TP_0A_0 & A_q^TP_0A_1 & \cdots & A_q^TP_0A_{q-1} & A_q^TP_0A_q \end{bmatrix}$$

نکته۱: به روش مشابه، با اعمال نامساوی‌های ماتریسی (۱۷) و (۱۸) به مدل تغییر یافته (۳۴)، نامساوی‌های متناظری برای سیستم دوبعدی مثبت با مدل کلی FTR (۳۲) به دست می‌آید.

نکته۲: با جاگذاری $A_k^0 = 0, k = 0,1,\dots,q$ در قضیه ۱۰، نامساوی‌های ماتریسی مناسبی برای سیستم‌های دوبعدی مثبت با مدل MFM به دست می‌آید.

مثال ۲: با استفاده از روش LMI پایداری نمایی سیستم مثبت با مدل کلی FTR (۳۲) با $q = 1$ و $A_0^0, A_0^1, A_0^2, A_1^0, A_1^1, A_1^2$ داده شده را بررسی کنید.

$$A_0^0 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}; A_0^1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.21 \end{bmatrix}; A_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; A_1^1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}; A_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

که این ماتریس‌ها همان ماتریس‌های (۳۳ب) از مدل تغییر یافته رابطه (۳۴) هستند.

حل:

$$\bar{A}_0 = \begin{bmatrix} A_0^0 & A_1^0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_0^1 & A_1^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.21 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A_0^2 & A_1^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با اعمال قضیه ۱۰ و استفاده از نرم‌افزار متلب همراه با $SEDUMI$ و $YALMIP$ برای حل کردن نامساوی ماتریسی (۳۵)، جواب زیر به دست می‌آید.

$$P = diag[0.1382 \;\; 2.0346 \;\; 0.0414 \;\; 1.0731]$$

و برای نامساوی ماتریسی (۳۷) جواب به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$P = diag[0.2681 \;\; 3.5981 \;\; 0.0647 \;\; 1.0731]$$

بنابراین نامساوی‌های ماتریسی نسبت به ماتریس P قابل هستند و در نتیجه سیستم دوبعدی مثبت با مدل کلی (FTR) داده شده پایدار مجانبی هست.

روش نامساوی ماتریسی به راحتی می‌تواند برای سیستم‌های دوبعدی کلی (*FTR*) و مثبت به فرم رابطه (۳۹) نیز بسط داده شود

$$x(i+1,j+1)=\sum_{k=0}^{q_1}\sum_{l=0}^{q_2}\left(A_{kl}^0x(i-k,j-l)+A_{kl}^1x(i+1-k,j-l)+A_{kl}^2x(i-k,j+1-l)\right) \qquad (۳۹)$$

که در آن داریم: $x(i,j)\in R_+^n; A_{kl}^t\in R_+^{n\times n}, t=0,1,2; k=0,1,\dots,q_1; l=0,1,\dots,q_2$

مرجع:

Tadeusz Kaczorek, "LMI approach to stability of 2D positive systems", Multidimensional System Signal Processing, vol.20, pp. 39–54, 2009.