دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی برق

پروژه درس بهینه‌سازی محدب

استاد: آقای دکتر صمدی

مهدی زینالی ۸۸۱۲۳۹۲۸

طراحی فیدبک خروجی استاتیک برای سیستم‌های سینگولار خطی با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی

مقدمه

سیستم‌های سینگولار برای توصیف گونه وسیعی از سیستم‌های عملی مانند مدارهای الکتریکی، سیستم‌های مکانیکی، رباتیک و غیره استفاده می‌شوند. نتایج متعددی برای بررسی پایداری این سیستم‌ها و همچنین

طراحی پایدارسازهای مختلف برای این سیستم‌ها در مراجع مختلف بیان شده است. به عنوان مثال در یک سری از مقالات پایدارسازی با استفاده از فیدبک حالت بر پایه نامساوی‌های ماتریسی مورد بررسی قرار گرفته است ولی پایدارسازی سیستم‌های سینگولار پیوسته با استفاده از فیدبک خروجی استاتیک و با استفاده از نامساوی‌های ماتریسی تابه‌حال مورد بررسی قرار نگرفته است. لذا در اینجا بر این هستیم تا این موضوع را مورد بررسی قرار دهیم. نشان داده شده است که حل این مساله در حالت کلی بسیار مشکل می‌باشد بنابراین توجه خود را بر روی دسته خاصی از سیستم‌های سینگولار که منظم، بدون ایمپالس و پایدار باشند معطوف خواهیم کرد و فیدبک خروجی استاتیک را به گونه‌ای طراحی خواهیم کرد که این دسته از سیستم‌های سنگولار در حالت حلقه بسته پایدار باشند. بدین منظور در حالتی که حالت‌های سیستم در دسترس نباشند از فیدبک خروجی استفاده می‌کنیم و برای طراحی بهره آن، یک مجموعه از نامساوی‌های ماتریسی (*LMI*) بایستی حل شوند که با استفاده از نرم‌افزار *YALMIP* به حل آن‌ها خواهیم پرداخت.

در بخش ۲ مساله به طور کامل بیان شده و تعاریف مورد نیاز اشاره خواهند شد. در بخش ۳ یک شرط *LMI* که برای بررسی منظم، بدون ایمپالس و پایدار بودن سیستم داده شده استفاده می‌شود ارائه شده است. همچنین روشی برای طراحی فیدبک حالت که سیستم حلقه بسته را منظم، بدون ایمپالس و پایدار بکند بیان شده است.

در بخش ۴ نتایج اصلی این مقاله برای تعیین فیدبک خروجی استاتیک با شرط اینکه سیستم حلقه بسته شرایط بیان شده را داشته باشد بیان شده است و نهایتا در بخش ۵ دو مثال عددی برای نشان دادن اعتبار نتایج بیان شده ارائه شده است که یکی از مثال‌ها برای سیستم سینگولار و مثال دیگر برای سیستم غیرسینگولار هست تا نشان دهیم که نتایج ارائه شده برای سیستم‌های سینگولار برای سیستم‌های غیرسینگولار نیز برقرار می‌باشد و در واقع از روی نتایج حاصل برای سیستم‌های سینگولار نتایج فرعی نیز برای سیستم‌های غیرسینگولار بیان شده است.

در این مقاله برای ماتریس‌های متقارن X,Y، علامت $X > Y$ بدین معنی است که ماتریس $X - Y$ مثبت معین است. همچنین علامت I نشان‌دهنده ماتریس همانی با ابعاد مناسب در محل مورد استفاده است. از طرف دیگر $diag[.]$ نشان‌دهنده یک ماتریس بلوک قطری و $Sym\{M\}$ نشان‌دهنده $M + M^T$ می‌باشند. [۱]

بیان مساله

سیستم سینگولار خطی با معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (۱)$$

که در آن $x(t) \in R^n$ بردار حالت، $x_0 \in R^n$ حالت اولیه، $u(t) \in R^m$ بردار ورودی کنترلی و $y(t) \in R^p$ بردار خروجی می‌باشند. همچنین $rank(E) = n_E < n$، $A \in R^{n\times n}$، $B \in R^{n\times m}$ و $C \in R^{p\times n}$ ماتریس‌های معلومی می‌باشند.

در اینجا فرض بر این است که بردار حالت برای فیدبک کردن در دسترس نمی‌باشد و لذا از فیدبک خروجی استفاده می‌کنیم.

نکته ۱: واضح است که در صورتی که ماتریس E غیرسینگولار باشد یعنی داشته باشیم: $rank(E) = n$، در این صورت با ضرب کردن طرفین رابطه (۱) در معکوس ماتریس E همان فرم معمول غیرسینگولار حاصل می‌شود و بنابراین نتایجی که در اینجا برای بررسی پایداری یا پایدارسازی با فیدبک خروجی برای سیستم‌های سینگولار مطرح خواهند شد به راحتی برای سیستم‌های غیرسینگولار نیز قابل تعمیم هستند.

در ادامه تعاریف زیر را در نظر بگیرید.

نکته ۲: سیستم‌های سینگولار می‌توانند جواب نداشته باشند، یا جواب یکتا داشته باشند یا بینهایت جواب داشته باشند. [۲]

تعریف ۱-۲- سیستم (۱) را منظم یا رگولار گوییم اگر سیستم مذکور برای شرایط اولیه داده شده جواب یکتایی داشته باشد. [۲]

قضیه ۱-۲- سیستم (۱) منظم است اگر و فقط اگر عدد $\lambda \in C$ وجود داشته باشد، به طوری که $(\lambda E - A)^{-1}$ وجود داشته باشد. [۲]

تعریف ۲-۲- سیستم (۱) قابل پایدار کردن گفته می‌شود اگر یک سیگنال کنترل به صورت زیر وجود داشته باشد.

$$u(t) = F_0 x(t) \tag{۲}$$

که در آن با F_0ای که یک ماتریس ثابت می‌باشد، سیستم حلقه بسته منظم، بدون ایمپالس و پایدار باشد. در حالتی که بردار حالت در دسترس باشد.

تعریف ۳-۲- سیستم (۱) قابل پایدار کردن گفته می‌شود اگر یک سیگنال کنترل به صورت زیر وجود داشته باشد.

$$u(t) = F y(t) \tag{۳}$$

که در آن با Fای که یک ماتریس ثابت می‌باشد، سیستم حلقه بسته منظم، بدون ایمپالس و پایدار باشد. در حالتی که بردار حالت در دسترس نباشد.

هدف این پروژه در واقع اولا توسعه شرایط پایداری بر پایه LMI برای سیستم (۱) با $u(t) = 0$ و ثانیا طراحی یک کنترل‌کننده فیدبک خروجی به فرم (۳) می‌باشد که سیستم حلقه بسته منظم، بدون ایمپالس و پایدار باشد.

ابتدا لم‌هایی را که در بخش بعد از آنها استفاده خواهیم کرد را بیان می‌کنیم.

لم ۱-۲- دو رابطه زیر با یکدیگر معادل هستند.

$$\begin{bmatrix} H & S^T \\ S & R \end{bmatrix} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad R > 0 \ , \ \ H - S^T R^{-1} S > 0$$

که در آن ماتریس‌های $H = H^T$، $R = R^T$ و S ماتریس‌هایی با ابعاد مناسب می‌باشند.

لم ۲-۲- دو عبارت زیر با یکدیگر معادل هستند.

الف- برای A, B, C داده شده، نامساوی ماتریسی زیر بر حسب X, Y، امکان‌پذیر[1] باشد.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} + Sym\left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C^T & -I \end{bmatrix}\right\} < 0$$

ب- برای A, B, C داده شده، نامساوی ماتریسی زیر برقرار باشد.

$$A + BC^T + CB^T < 0$$

لم ۳-۲- دو عبارت زیر با یکدیگر معادل هستند.

الف- برای A, B, C داده شده، نامساوی ماتریسی زیر بر حسب G، امکان‌پذیر باشد.

$$\begin{bmatrix} A & B + CG^T \\ B^T + GC^T & -G - G^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} + Sym\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} C^T & -I \end{bmatrix}\right\} < 0$$

ب- برای A, B, C داده شده، نامساوی ماتریسی زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} A < 0 \\ A + BC^T + CB^T < 0 \end{cases}$$

پایداری و پایدارسازی با فیدبک حالت

فرض کنید ورودی سیستم صفر می‌باشد، حال می‌خواهیم شرایط پایداری سیستم سینگولار داده شده با روابط (۱) را بررسی کنیم. در واقع در اینجا هدف بررسی نوع خاصی از پایداری سیستم داده شده بر اساس یک سری نامساوی ماتریسی می‌باشد که تحت عنوان منظم، بدون ایمپالس و پایدار بودن بیان شده است. قضایای زیر این موضوع را بیان می‌کنند.

لم ۱-۳- برای هر سیستم سینگولار ماتریس‌های غیرسینگولار M و N وجود دارند به نحوی که داشته باشیم: [۳]

[1] *Feasible*

$$MEN = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad MAN = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

اگر سیستم مذکور منظم باشد در این‌صورت $A_2 = A_3 = 0; A_4 = I$ می‌باشند.

لم ۲-۳- اگر ماتریس N یک ماتریس غیرسینگولار باشد در این صورت $A < 0$ می‌باشد اگر و فقط اگر داشته باشیم: $N^T A N < 0$ [۴]

لم ۳-۳- برای هر ماتریس مربعی حقیقی X رابطه زیر برقرار است: [۳]

$$-\|X\| \leq \alpha(X) \leq \mu(X) \leq \|X\|$$

که در آن $\alpha(X)$ بزرگترین مقدار ویژه ماتریس X و $\mu(X) = \frac{1}{2}\lambda_{max}(X + X^T) = \frac{1}{2}\alpha(X + X^T)$ می‌باشند.

لم ۴-۳- اگر ماتریس A_4 اشاره شده در لم ۱-۳ غیرسینگولار باشد در این صورت سیستم منظم و بدون ایمپالس می‌باشد. [۳]

قضیه ۱-۳- سیستم (۱) منظم، بدون ایمپالس و پایدار است اگر یک ماتریس غیرسینگولار مانند P وجود داشته باشد به نحوی که نامساوی‌های ماتریسی زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ P^T A + A^T P < 0 \end{cases} \qquad (۴)$$

اثبات:

اثبات این قضیه را به دو بخش تقسیم می‌کنیم بخش اول مربوط به منظم بودن و ایمپالس نداشتن بوده و بخش دوم مربوط به پایداری می‌شود.

ابتدا فرض کنید می‌خواهیم نشان دهیم که اگر شرایط قضیه برقرار باشد سیستم (۱) منظم و بدون ایمپالس می‌باشد. طبق لم ۱-۳ دو ماتریس $\widehat{M}$ و $\widehat{N}$ را به نحوی انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم:

$$\widehat{M} E \widehat{N} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\widehat{M} A \widehat{N} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \hat{A}_2 \\ \hat{A}_3 & \hat{A}_4 \end{bmatrix} \quad ; \quad \widehat{M}^{-T} P \widehat{N} = \begin{bmatrix} \hat{P}_1 & \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 & \hat{P}_4 \end{bmatrix}$$

حال اگر از نامساوی اول رابطه (۴) استفاده کنیم دیده می‌شود که خواهیم داشت:

$$\hat{P}_2 = 0 \quad ; \quad \hat{P}_1 = \hat{P}_1^T$$

حال اگر طرفین نامساوی دوم رابطه (۴) را از راست در $\widehat{N}$ و از چپ در $\widehat{N}^T$ (طبق لم ۲-۳) ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & \hat{A}_4^T\hat{P}_4 + \hat{P}_4^T\hat{A}_4 \end{bmatrix} < 0$$

که علامت * را استفاده نخواهیم کرد و در ادامه هم نیازی به آن نداریم. حال طبق لم ۱-۲ باید داشته باشیم:

$$\hat{A}_4^T\hat{P}_4 + \hat{P}_4^T\hat{A}_4 < 0$$

با استفاده از لم ۳-۳ خواهیم داشت: [۳]

$$\alpha(X) \le \mu(X) = \tfrac{1}{2}\lambda_{max}(X + X^T) \rightarrow X = \hat{P}_4^T\hat{A}_4 \rightarrow \alpha\left(\hat{P}_4^T\hat{A}_4\right) \le \tfrac{1}{2}\lambda_{max}\left(\hat{A}_4^T\hat{P}_4 + \hat{P}_4^T\hat{A}_4\right) < 0$$

بنابراین $\hat{P}_4^T\hat{A}_4$ و در نتیجه $\hat{A}_4$ غیرسینگولار می‌باشند و از لم ۴-۳ می‌توان نتیجه گرفت که سیستم داده شده منظم و بدون ایمپالس می‌باشد. در نتیجه بخش اول اثبات به اتمام می‌رسد.

برای اثبات بخش دوم فرض کنید که $x(t)$ حالت سیستم در لحظه t باشند و تابع زیر را به عنوان یک کاندید برای تابع لیاپانوف در نظر بگیرید.

$$V(x) = x^T E^T P x$$

که در آن ماتریس P یک جواب برای رابطه (۴) می‌باشد.

با محاسبه مشتق تابع لیاپانوف خواهیم داشت:

$$\dot{V}(x) = x^T(A^T P + PA)x = x^T\Theta x$$

که اگر رابطه (۴) برقرار باشد در این‌صورت $\dot{V}(x) < 0$ خواهد بود و در نتیجه سیستم مورد نظر پایدار می‌باشد و بدین ترتیب بخش دوم اثبات قضیه نیز تکمیل می‌شود. ■

قضیه فرعی ۱-۳- سیستم (۱) منظم، بدون ایمپالس و پایدار است اگر یک ماتریس غیرسینگولار مانند P وجود داشته باشد به نحوی که نامساوی‌های ماتریسی زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases} E^T P^T = PE \ge 0 \\ P^T A^T + AP < 0 \end{cases}$$

در ادامه می‌خواهیم بحث پایدارسازی با استفاده از فیدبک حالت را مورد بررسی قرار دهیم. حال فرض کنید که فیدبک حالت به فرم (۲) باشد، با جایگذاری فیدبک حالت در معادلات سیستم سینگولار که به فرم (۱) می‌باشد خواهیم داشت:

$$E\dot{x}(t) = (A + BF_0)x(t) = A_{cl}x(t)$$

که در آن داریم: $A + BF_0 = A_{cl}$

بر اساس قضیه ۱-۳ سیستم حلقه بسته فوق منظم، بدون ایمپالس و پایدار است اگر یک ماتریس غیرسینگولار مانند P وجود داشته باشد به نحوی که نامساوی‌های ماتریسی زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ P^T A_{cl} + A_{cl}^T P < 0 \end{cases}$$

با جایگذاری A_{cl} در نامساوی ماتریسی دوم رابطه فوق خواهیم داشت:

$$P^T A + A^T P + P^T BF_0 + [P^T BF_0]^T < 0$$

که رابطه فوق یک رابطه غیرخطی بر حسب پارامترهای طراحی P, F_0 می‌باشد. برای اینکه رابطه فوق را به صورت یک LMI تبدیل کنیم با تعریف $X = P^{-1}$ و ضرب کردن X از سمت راست در رابطه فوق و X^T از سمت چپ در رابطه فوق (طبق لم ۲-۳) خواهیم داشت:

$$AX + X^T A^T + BF_0 X + X^T F_0^T B^T < 0$$

حال اگر $Y = F_0 X$ را قرار دهیم شرط کافی زیر را خواهیم داشت:

$$AX + X^T A^T + BY + Y^T B^T < 0$$

همچنین توجه شود که شرط اول در رابطه (۴) معادل با رابطه زیر است:

$$EX = X^T E^T \geq 0$$

قضیه زیر نتایج این توسعه را به صورت خلاصه بیان می‌کند.

قضیه ۲-۳- اگر ماتریس غیرسینگولار X و ماتریس Y وجود داشته باشد به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} EX = X^T E^T \geq 0 \\ AX + X^T A^T + BY + Y^T B^T < 0 \end{cases} \qquad (۵)$$

در این صورت سیستم (۱) منظم، بدون ایمپالس و پایدار است و بهره کنترل‌کننده توسط رابطه زیر به دست می‌آید:

$F_0 = YX^{-1}$

در بخش بعدی طراحی یک فیدبک خروجی استاتیک را بررسی خواهیم کرد که فرض بر آن است که یک فیدبک حالت با بهره F_0 که سیستم سینگولار (۱) را منظم، بدون ایمپالس و پایدار می‌کند، وجود دارد.

پایدارسازی با استفاده از فیدبک خروجی استاتیک

حال تمرکز خود را بر طراحی فیدبک خروجی به فرم (۳) خواهیم گذاشت. با جایگذاری عبارت کنترل‌کننده به فرم (۳) در روابط دینامیکی سیستم به فرم (۱) خواهیم داشت:

$E\dot{x}(t) = (A + BFC)x(t) = A_{cl}x(t)$

که در آن داریم: $A + BFC = A_{cl}$

بر اساس قضیه ۱-۳ سیستم حلقه بسته فوق منظم، بدون ایمپالس و پایدار است اگر یک ماتریس غیرسینگولار مانند P وجود داشته باشد به نحوی که نامساوی‌های ماتریسی زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ P^T A_{cl} + A_{cl}^T P < 0 \end{cases}$$

با جایگذاری A_{cl} در نامساوی ماتریسی دوم رابطه فوق خواهیم داشت:

$P^T A + A^T P + P^T BFC + [P^T BFC]^T < 0$

که رابطه فوق یک رابطه غیرخطی بر حسب پارامترهای طراحی P, F می‌باشد. برای اینکه رابطه فوق را به صورت یک LMI تبدیل کنیم از ایده استفاده شده در مرجع [۵] استفاده خواهیم کرد. ایده مذکور در ابتدا شامل طراحی یک فیدبک حالت به فرم $u(t) = F_0 x(t)$ می‌باشد که در بخش قبلی به طور کامل مورد بحث قرار گرفت.

با قرار دادن روابط زیر می‌توانیم شرایط فوق را به صورت زیر بیان کنیم.

$$A_0 = A + BF_0$$

$$S = FC - F_0$$

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ P^T A + A^T P + P^T BFC + [P^T BFC]^T < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ P^T [A_0 + BS] + [A_0 + BS]^T P < 0 \end{cases}$$

که می‌تواند به صورت نیز بیان شود:

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ P^T A_0 + A_0 P + P^T BS + S^T B^T P < 0 \end{cases}$$

با استفاده از لم ۲-۲ خواهیم داشت:

دقت شود که برای همخوانی با لم ۲-۲ باید A, B, C به صورت زیر تعریف شوند:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} + Sym\left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} [C^T \quad -I]\right\} < 0 \leftrightarrow A + BC^T + CB^T < 0$$

$$A = P^T A_0 + A_0 P; B = P; C = BS$$

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ \begin{bmatrix} P^T A_0 + A_0 P & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} + Sym\left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} [BS \quad -I]\right\} < 0 \end{cases}$$

که می‌تواند به صورت نیز بیان شود:

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ \begin{bmatrix} P^T A_0 + A_0 P & P - X \\ P^T - X^T & 0 \end{bmatrix} + Sym\left\{\begin{bmatrix} XBS & 0 \\ YBS & -Y \end{bmatrix}\right\} < 0 \end{cases}$$

حال اگر از لم ۳-۲ استفاده کنیم خواهیم داشت:

دقت شود که برای همخوانی با لم ۳-۲ باید A, B, C به صورت زیر تعریف شوند:

$$\begin{bmatrix} A & B + CG^T \\ B^T + GC^T & -G - G^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} + Sym\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} G [C^T \quad -I]\right\} < 0 \leftrightarrow A + BC^T + CB^T < 0$$

$$A = \begin{bmatrix} P^T A_0 + A_0 P & P - X \\ P^T - X^T & -Y - Y^T \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} XB \\ YB \end{bmatrix}; C^T = [S \quad 0]$$

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ \begin{bmatrix} P^T A_0 + A_0 P & P & 0 \\ P^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad -I \quad 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ -I \\ 0 \end{bmatrix} [X^T \ Y^T \quad 0] + \begin{bmatrix} XB \\ YB \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad I] \\ \quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} [B^T X^T \quad B^T Y^T \quad 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} G [S \quad 0 \quad -I] + \begin{bmatrix} S^T \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} G^T [0 \quad 0 \quad I] < 0 \end{cases}$$

با قرار دادن $L = GF$ و جایگذاری مقدار S، قضیه زیر نتایج مذکور را به صورت خلاصه بیان می‌کند.

قضیه ۱-۴- فرض کنید فیدبک حالت با بهره F_0، سیستم سینگولار با رابطه (۱) را پایدار می‌کند. حال اگر یک ماتریس غیرسینگولار مانند P، ماتریس متقارن و مثبت معین مانند G و ماتریس‌های X,Y,L وجود داشته باشند به شرطی که نامساوی‌های ماتریسی زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ \begin{bmatrix} P^T A_0 + A_0 P & P^T & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + Sym\left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \end{bmatrix}\right\} + Sym\left\{\begin{bmatrix} XB \\ YB \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix}\right\} \\ \quad + Sym\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} LC - GF_0 & 0 & -G \end{bmatrix}\right\} < 0 \end{cases} \quad (۶)$$

در این صورت سیستم (۱) پایدار هست و بهره کنترل‌کننده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = G^{-1}L$$

اگر ماتریس E سینگولار نباشد در این صورت نتایج به دست آمده هنوز معتبر بوده و از شرط $E^T P = P^T E$ نتیجه می‌شود که ماتریس P باید متقارن و مثبت معین باشد. در واقع نتیجه فرعی قضیه فوق به صورت زیر حاصل می‌شود.

قضیه فرعی ۱-۴- برای فیدبک حالت داده شده با بهره F_0 برای سیستم (۱)، اگر ماتریس‌های متقارن و مثبت معین P,G و ماتریس‌های X,Y,L وجود داشته باشد به نحوی که شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{cases} E^T P = P^T E \geq 0 \\ \begin{bmatrix} P^T A_0 + A_0 P & P^T & 0 \\ P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + Sym\left\{\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \end{bmatrix}\right\} + Sym\left\{\begin{bmatrix} XB \\ YB \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & I \end{bmatrix}\right\} \\ \quad + Sym\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} LC - GF_0 & 0 & -G \end{bmatrix}\right\} < 0 \end{cases} \quad (۷)$$

در این صورت سیستم (۱) پایدار است و بهره کنترل‌کننده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = G^{-1}L$$

نتایج برای مثال‌های عددی

برای نشان دادن اعتبار نتایج بحث شده در بخش‌های قبل، یک سیستم سینگولار با ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 1 & 0 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با حل کردن نامساوی‌های ماتریسی رابطه (۵) با استفاده از نرم‌افزار متلب خواهیم داشت:

$$X = \begin{bmatrix} 0.9997 & -0.0000 & 0.0 \\ -0.0000 & 0.9975 & 0.0 \\ -1.5212 & -4.7352 & -0.2198 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} -0.4927 & 3.2377 & 1.9590 \\ 2.1232 & -0.0000 & -0.7350 \end{bmatrix}$$

که در این صورت بهره فیدبک حالت برای پایدارسازی سیستم سینگولار به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$F_0 = \begin{bmatrix} -14.0536 & -39.0584 & -8.9114 \\ 7.2118 & 15.8721 & 3.3435 \end{bmatrix}$$

و با حل نامساوی‌های ماتریسی (۶) خواهیم داشت:

$$X = \begin{bmatrix} 0.3991 & -0.4243 & 0.0839 \\ -0.5380 & 0.3292 & 0.1753 \\ 0.2778 & -0.6966 & -0.0659 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 0.2371 & -0.2162 & 0.0896 \\ -0.2157 & 0.2691 & -0.0265 \\ 0.0907 & -0.0254 & 0.2659 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.4616 & -0.4038 & 0.0 \\ -0.4038 & 0.3756 & 0.0 \\ 0.3391 & -0.6749 & -0.1450 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0.1271 & 0.2643 \\ 0.2643 & 0.9274 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 0.0797 & -0.0119 \\ 2.8052 & 5.2568 \end{bmatrix}$$

در نهایت بهره فیدبک خروجی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = \begin{bmatrix} -13.8971 & -29.1559 \\ 6.9856 & 13.9779 \end{bmatrix}$$

چون LMI جواب دارد می‌توان نتیجه گرفت که این کنترل‌کننده سیستم سینگولار داده شده را پایدار می‌کند.

حال فرض کنید که ماتریس E غیرسینگولار باشد و به عنوان مثال همان ماتریس واحد باشد حال می‌خواهیم از قضیه فرعی ۱-۴ استفاده کنیم. با حل کردن نامساوی‌های (۷) و استفاده از بهره F_0 به صورت زیر:

$$F_0 = \begin{bmatrix} -1.2283 & 0.0303 & 0.0333 \\ 1.0273 & 0.8111 & 0.4135 \end{bmatrix}$$

خواهیم داشت:

$$X = \begin{bmatrix} 1.1381 & -0.3662 & 0.2571 \\ -0.4053 & 0.7907 & -0.1135 \\ 0.2495 & -0.2981 & 0.2160 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} 0.3745 & -0.1012 & 0.0487 \\ -0.1005 & 0.3753 & -0.0482 \\ 0.0500 & -0.0469 & 0.3062 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.1541 & -0.3906 & 0.1763 \\ -0.3906 & 0.7703 & -0.1837 \\ 0.1763 & -0.1837 & 0.5914 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0.9682 & 0.2810 \\ 0.2810 & 1.2544 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} -1.9160 & 0.0200 \\ 1.2449 & 1.7246 \end{bmatrix}$$

در نهایت بهره فیدبک خروجی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$F = \begin{bmatrix} -2.4245 & -0.4047 \\ 1.5355 & 1.4654 \end{bmatrix}$$

چون LMI جواب دارد می‌توان از قضیه فرعی ۱-۴ نتیجه گرفت که این کنترل‌کننده سیستم داده شده را پایدار می‌کند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله با دسته‌ای از سیستم‌های پیوسته سینگولار و خطی سروکار داشتیم و نتایجی را به صورت نامساوی‌های ماتریسی برای بررسی پایداری و نیز پایدارسازی این سیستم‌ها بیان کردیم. همچنین در حالتی که حالت سیستم برای استفاده در فیدبک حالت در دسترس نباشد، فیدبک خروجی استاتیک را بر پایه همین نامساوی‌های ماتریسی طراحی کردیم که سیستم حلقه بسته را منظم، بدون ایمپالس و پایدار می‌سازد و در نهایت بهره کنترل‌کننده نیز از حل یک سری LMIها حاصل می‌شود.

مراجع:

1. E. K. Boukas, "Static Output Feedback Control for linear descriptor Systems: LMI Approach", Proceedings of the IEEE International Conference on Mechatronics & Automation, Niagara Falls, Canada, July 2005.

2. S. L. Campbell, Singular Systems of Differential Equations, Pitman advanced publishing program, 1980.

3. Shengyuan Xu and James Lam, Robust Control and Filtering of Singular Systems, Springer-Verlag Berlin, 2006.
4. Carsten Scherer and Siep Weiland, Linear Matrix Inequalities in Control, Delft University of Technology The Netherlands, 2004.
5. D. Mehdi, E. K. Boukas and O. Bachelier, "Static Output Feedback Design for Uncertain Linear Discrete-time System", IMA Journal of Mathematical Control and Information, vol. 21, pp. 1-13, 2004